1　ジョルダン標準型の作り方

まずはジョルダン標準型の作り方を紹介します．理論的なことは後にします．

1.1　ジョルダンブロック

ジョルダン標準型を求めるとき，先にその形を決めてから変換行列を求めた方が考えやすくなります．では，どうすれば形を決めることができるかというと，**ジョルダンダイアグラム**というものを使うと，**ジョルダンブロック**の大きさ・個数が分かります．
ジョルダンブロックとは，

$$J(\lambda;r)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}\quad \text{(対角成分がすべて固有値}\lambda\text{，その 1 つ上がすべて 1 の } r \text{ 次正方行列)}$$

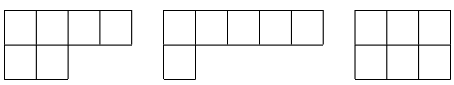
で定義される正方行列です．ジョルダン標準型とは，ジョルダンブロックの集合体です．例えば，

$$J(3;2)\oplus J(1;1):=\begin{pmatrix}J(3;2) & \\ & J(1;1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

はジョルダン標準型です．このような行列を求めると，漸化式や微分方程式を解くのに役に立ちます．ですから，ジョルダン標準型を作るにあたって，まずはジョルダンブロックを求めることから始めます．そのルールを以下に述べます．「なぜこれで求めることができるのか」といったことは後述します．まずは方法を体得しましょう．

ジョルダンブロックの求め方

- 正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$(次数は n) とする．解 (すなわち A の固有値) の 1 つを λ とし，その重複度を r とする．λ に属する固有空間を $V(\lambda)$ とするとき，$\dim V(\lambda)=n-\mathrm{rank}(A-\lambda E)$ が固有値 λ のジョルダンブロックの個数 (r_λ とする) を与える．
- 個数が分かったら，ジョルダンダイアグラムを描く．ジョルダンダイアグラムは n 個の箱を並べたものである．今，r_λ 行に分けて上から描いていく．例えば次のようになる．簡単のため，$\Phi_A(t)=(t-a)^6$ という，1 つの固有値を持つ行列 A で考えてみよう．$\mathrm{rank}(A-aE)=4$ ならば，ジョルダンブロックの個数は $6-4=2$ で，ジョルダンダイアグラムは下の通り：

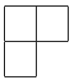


  この場合ならば，3 通りあるということになる．
- $\mathrm{rank}(A-\lambda E)^i$ は左から i 番目でダイアグラムを切ったときの残りの箱の個数を与える．
- 十分な情報を得るまでこれを繰り返し，最終的に残ったダイアグラムが求めるべきジョルダンブロックに対応する．
- ジョルダンダイアグラムの各段に対し，横に並んだ箱の個数がジョルダンブロックの大きさを与え，縦に並んだ箱の個数がジョルダンブロックの個数を与える．

文章で書くと分かりにくいです．具体例を通じてやってみましょう．

例 1　$\Phi_A(t) = (t+1)^3(t-3), \mathrm{rank}(A+E) = 2, \mathrm{rank}(A-3E) = 3$

固有値 -1 に対するジョルダンブロックの個数は，$4-2=2$．ダイアグラムで考えられるのは，



だけとなる (しまった…).

固有値 3 に対するジョルダンブロックの個数は 1．ダイアグラムで考える必要は特にない．

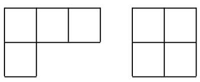
以上より，ジョルダン標準型は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

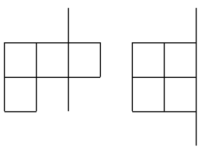
となる．

例 2　$\Phi_A(t) = (t-1)^4, \mathrm{rank}(A-E) = 2, \mathrm{rank}(A-E)^2 = 1$

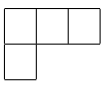
固有値 1 に対するジョルダンブロックの個数は，$4-2=2$．ダイアグラムで考えられるのは，



$\mathrm{rank}(A-E) = 1$ から，



適するのは，



となる．ゆえに，ジョルダン標準型は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

こんな感じです．問題によっては，1 通りに決まらない場合もあります．その場合はすべてを列挙すればいいことになります．

1.2 変換行列の求め方

ここが難しいところだと思います．ジョルダン標準型が分かっても，ジョルダン標準型にするための変換行列が分からないと，漸化式や微分方程式を解くことができなくなります．また，テストでは確実に原点対象です．気をつけましょう．**このシケプリでは 2 つの方法を紹介します**．どちらがやりやすいかは個人によると思います．あるいは問題によって使い分けるというのも手かもしれません．両方読んでみて下さい．

1.2.1 方法 1 「存在証明的」方法

方法 1 は，ジョルダン標準型が存在することを証明するときに使う手法をそのまま計算に使う方法です．これが授業でやった方法です．この方法についていくつか難点があります．まずは手法を述べて，そのあとの例を通じてその難点を解説します (個人的には，この難点を攻略するための方法が後述の方法 2 だと思います)．これは具体的に述べたいと思います．

- ジョルダン標準型はダイアグラムを使って次のようなものであると分かっているとする：

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & & \\ \hline & & & \beta & 1 \\ & & & & \beta \end{array}\right)$$

これに変換するための変換行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5)$ を求めたい．

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$
$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$	

のように，ダイアグラムに合わせてベクトルを並べる．
- まずは $\boldsymbol{x}_3$ をとる．$(A-\alpha E)^3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, (A-\alpha E)^2\boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{0}$ となるようにとる．
- つぎに，$\boldsymbol{x}_2 = (A-\alpha E)\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{x}_1 = (A-\alpha E)^2\boldsymbol{x}_3$ とする．
- $\beta(\neq \alpha)$ についても同様にする．$\boldsymbol{x}_5$，$\boldsymbol{x}_4 = (A-\beta E)\boldsymbol{x}_5$ である．
- $\beta = \alpha$ の場合は，少し難しい．まず，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ については分かっているとする：

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$
$\boldsymbol{x}_4$?	$\boldsymbol{x}_5$?	

まだ分かっていない $\boldsymbol{x}_5$ を求める．このとき，$V(\alpha), \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_5$ が 1 次独立となるようにとる．$V(\alpha)$ は α に属する固有空間である．そして $\boldsymbol{x}_4 = (A-\alpha E)\boldsymbol{x}_5$ とする．
- 以上の手順で，X を求めることができる．

1.2.2 方法 2 「連立 1 次方程式的」方法

次の方法は，方法 1 よりも機械的に求められるという点で良いと思います．個人的にこっちが好きなので，こっちの解説はしっかりやります (ごめんなさい)．方法 1 のときと同じジョルダン標準型だとします．

- **大きさ 2 以上のブロックを作るにあたって**，$(A-\alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在するような $\boldsymbol{b}$ の条件を求めておく．基本変形をしておくと，その後で連立 1 次方程式を解くときに楽になる．**大きさ 1 のブロックを作るときは，解を持つ条件を満たさない固有ベクトルを持ってきても良い**．つまり，固有空間の元を，解けるものと解けないものに分けたとき，解けないものは大きさ 1 のジョルダンブロックを作る．
- まず，$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}_1$(つまり α に属する固有ベクトル) を求める．
- $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ を満たす $\boldsymbol{x}_2$ を求める．
- $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2$ を満たす $\boldsymbol{x}_3$ を求める．

- $\beta(\neq \alpha)$ のときも同様.
- $\beta = \alpha$ のときは，α に属する固有ベクトルで $\boldsymbol{x}_1$ と 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{x}_4$ をとり，$\boldsymbol{x}_5 = (A - \alpha E)\boldsymbol{x}_4$ とすればよい.

なぜこの方法が「連立 1 次方程式的」かというのは，例を通じてやってみれば分かると思います.

例題 次の行列を，方法 2 によってジョルダン標準型に変換せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

解答 固有多項式は $\Phi_A(t) = (t+1)^3(t-3)$．$t = 3$ に関しては固有ベクトルだけになり，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分かる．$t = -1$ に関しては，$\mathrm{rank}(A + E) = 2$ だから，ジョルダンブロックの個数は $4 - 2 = 2$．この時点で，ジョルダン標準型は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と分かる.

次に，変換行列を求める．$(A + E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つような $\boldsymbol{b}$ の条件を求める．そのために，基本変形を用いる：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 7 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & b_2 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & b_3 \\ 1 & -3 & 7 & -1 & b_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 7 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & b_1 - 3b_2/4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & b_2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 \end{array}\right)$$

よって，解を持つには $b_1 = b_4, b_2 = b_3$.

固有ベクトルは次の方程式の解：

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}-x_2} + \ x_3 - x_4 = 0 \\ - x_2 + 2x_3 \phantom{{}-x_4} = 0 \end{cases}$$

これは，

$$\begin{pmatrix} -p + q \\ 2p \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

上で求めた条件から，$p = 0$．そして，$q = 1$ として，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(A + E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ なる $\boldsymbol{x}_2$ を求める．基本変形しておいた式に $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$ の値を代入すると，

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}-x_2} + \ x_3 - x_4 = 1 \\ - x_2 + 2x_3 \phantom{{}-x_4} = 0 \end{cases}$$

$x_3=1, x_4=0$ として，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{x}_1$ と 1 次独立にとって (**注意** 1),

$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$

先に求めておいた $t=3$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_4$ として,

$X=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&1\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

とおけば,

$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&3\end{pmatrix}$

となる．//

注意 1　$\boldsymbol{x}_3$ の求め方が，解を持つ条件に反しているように思う人もいるかと思います．しかし，これは先述のように，大きさ 1 のジョルダンブロックを作るために，$(A+E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解けない固有ベクトル $\boldsymbol{b}$ を持ってきているのです.

それからもう 1 つ付け加えます．実は，この作業を繰り返すと，あるところ (p 回目の操作) で解を持つ条件を満たさないベクトルが出てきます．実はこれが「**今あなたが求めているジョルダンブロックの大きさは p ですよ**」と教えてくれています．今の問題だと，$\boldsymbol{x}_2$ が解を持つ条件を満たしていません．ということは，今まで求めたジョルダンブロックの大きさは 2 であると分かったわけです．この事実を使えば，具体的な問題では (つまり，行列を与えられれば)，ジョルダンダイアグラムを使わなくてもジョルダン標準型の形を決定できます．ただし，行列が分からず，ランクの条件だけが与えられている場合などは，ジョルダンダイアグラムを使う必要があります．具体的な問題でもジョルダンダイアグラムを使った方が見通しが良いので，いずれにしてもジョルダンダイアグラムで形を決めてから変換行列の基底を求めましょう.

上の解法では，連立 1 次方程式的な方法を使っているので (解が存在するための条件を求めたりするところ)，こう呼ぶことにしました．もちろん，これは公式な呼び名ではないので注意してください．「連立 1 次方程式的方法で解く」なんてことを解答に書いたら，絶対に分かってもらえません.

方法 2 については少し理論的な解説をします.

$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$

$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1$

$\vdots$

$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_{n-1}$

のようにすると,

$A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\alpha\boldsymbol{x}_1,\alpha\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_1,\cdots,\alpha\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_{n-1})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\alpha&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\alpha\end{pmatrix}$

となるので，$X=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ とすれば，$X^{-1}AX$ はジョルダンブロックになります．X が正則であることの証明は問題にします.

2　ジョルダン標準型の応用

2.1　漸化式

これは対角化のときにもやったので，概要は分かると思います．ここは例題だけにしておきます．この前の確認テストからの抜粋です．

例題　次の漸化式の一般項を求めよ．

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n \quad (n \geq 0), a_0 = -1, a_1 = -2, a_2 = 4$$

解答　次のように書き換える：

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

をジョルダン標準型にする．$\Phi_A(t) = (t-2)^3$．$\mathrm{rank}(A-2E)$ を求めると同時に，方程式 $(A-2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ (T は転置を表す) が解を持つような $\boldsymbol{b}$ の条件を求める．

$$(A - 2E \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_2 \\ 8 & -12 & 4 & b_3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 + b_3/4 \\ 0 & -2 & 1 & b_2 \\ 2 & -1 & 0 & -b_2 + b_3/4 \end{array} \right)$$

よって，$\mathrm{rank}(A-2E) = 2$ で，ジョルダンブロックの個数は，$3 - 2 = 1$．解を持つ条件は $b_1 - b_2 + b_3/4 = 0$．一般解は,

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - b_3/4 \\ 3b_2 - b_3/2 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}_1$ として,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ を満たす $\boldsymbol{x}_2$ として,

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2$ を満たす $\boldsymbol{x}_3$ として,

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

によって,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

$$A^n = X \begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} X^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(第 1 行のみ計算すればよい)

$$a_n = 2^n(n^2 - n - 1) \quad (n \geq 0)$$

これは方法 2 でやりました．方法 2 が有効であると思う理由は，計算量を軽減できるからです．最初に一般解を求めているので，$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を求めるのが楽になっています (b_1, b_2, b_3 に数字を代入して，$c = 0$ としているだけ)．方法 1 みたいに，冪乗を求めて計算するのはきついですし，そもそもこの問題がジョルダン標準型を求めてからもステップを踏まなければならないので，できるだけ計算は効率的に行うようにすべきです．この前の確認テストで，方法 1 が相当シンドイと実感しました．個人的な推測ですが，先生は存在証明の方法と計算の方法を別々にしないようにして，存在証明的方法を計算でも使っているのだと思います．方法 2 だと芋づる式に基底を得られる場合もあるので，覚えておくと良いと思います．

2.2　微分方程式

これも対角化のときにやったので，確認テストの問題を通じて覚えてください．

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 15 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

に対し，$\exp(tA)$ と微分方程式 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の一般解を求めよ．

解答　$\Phi_A(t) = (t+2)^3$．$\mathrm{rank}(A+2E)$，$(A+2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の有解条件，およびその一般解を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 15 & b_1 \\ 1 & 1 & 3 & b_2 \\ -2 & -3 & -6 & b_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+3b_3 \\ 1 & 0 & 3 & 3b_2+b_3 \\ 0 & -1 & 0 & 2b_2+b_3 \end{array}\right)$$

よって，$\mathrm{rank}(A+2E) = 2$(ジョルダンブロックは 1 個)，有解条件は $b_1 + b_2 + 3b_3 = 0$，一般解は

$$\boldsymbol{x}_0 = c\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b_2+b_3 \\ -2b_2-b_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A+2E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x}_1$ として，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(A+2E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ なる $\boldsymbol{x}_2$ として，

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(A+2E)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2$ なる $\boldsymbol{x}_3$ として，

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

正則行列 X を次のようにとる：

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

すると，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}\exp(tA)X = \exp\{t(X^{-1}AX)\} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n (X^{-1}AX)^n\right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

微分方程式の一般解は，定ベクトルを $\boldsymbol{c}$ として，

$$\boldsymbol{x} = (\exp(tA))\,\boldsymbol{c} = X \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} X^{-1}\boldsymbol{c}$$

$X^{-1}\boldsymbol{c}$ は定ベクトルとしてまとめて，

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} & (1-3t)e^{-2t} & (-\frac{3t^2}{2}+t-3)e^{-2t} \\ 0 & -e^{-2t} & (2-t)e^{-2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$(c_1, c_2, c_3$ は定数)
となる．//

3　理論周辺

ここからは理論的なことをやります．基礎的な部分だけにとどめておきます．

3.1　一般固有空間

まず，**広義固有空間**とは，固有値 α に対して，ある k において，$(A-\alpha E)^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる，$V = K^n$ の部分空間のことです：

$$W_k(\alpha) = \mathrm{Ker}(A-\alpha E)^k = \{\boldsymbol{x} \in V \mid (A-\alpha E)^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$k=1$ のときは固有値 α に属する固有空間 $V(\alpha)$ になります．そのような意味で，「広義」と呼ばれているのでしょう．次の関係は明らかでしょう：

$$V(\alpha) = W_1(\alpha) \subset W_2(\alpha) \subset \cdots \subset V$$

しかし，どこかで $W_k = W_{k+1}$ とならなければなりません．V で抑えられているからです：

$$(\exists k \in \mathbb{N})\ (W_k = W_{k+1})$$

一般固有空間 ($\tilde{W}(\alpha)$ で表します) とは，広義固有空間の和集合です：

$$\tilde{W}(\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(A-\alpha E)^k$$

しかし，さっき述べたように，どこかで広義固有空間が等しくなるので，無限大まで和集合を取らなくても構わないわけです．以下では，授業でやった定理を証明つきでまとめておきます．ただし，ここからは $W(\alpha) := \{\boldsymbol{x} \in V \mid \exists\mathbb{N},\ (A-\alpha E)^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書きます．

定理 I　$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in W(\alpha)$, $\beta \neq \alpha$ のとき，$\mathbf{0} \neq (A-\beta E)\boldsymbol{x} \in W(\alpha)$
証明　A と E は可換だから，

$$(A-\alpha E)^k(A-\beta E)\boldsymbol{x} = (A-\beta E)(A-\alpha E)^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

ゆえに，$(A-\beta E)\boldsymbol{x} \in W(\alpha)$．もし，$(A-\beta E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ で，

$$(A-\beta E)\boldsymbol{x} = (\beta-\alpha)^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

第 2 辺は $\mathbf{0}$ ではない．これは矛盾．//

定理 II　$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を A の異なる固有値とする．このとき，

$$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_i \in W(\alpha_i) \Longrightarrow \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_s \text{は 1 次独立}$$

証明　s に関する帰納法で証明する．$s=1$ のときは明らか．$s-1$ のときに主張が正しいとする．

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{x}_s = \mathbf{0}$$

に対し，$(A-\alpha_1 E)^k$ を掛ける．すると，$(A-\alpha_1 E)^k\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$ より，

$$c_2(A-\alpha_1 E)^k\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_s(A-\alpha_1 E)^k\boldsymbol{x}_s = \mathbf{0}$$

定理 I より，$\mathbf{0} \neq (A-\alpha_1 E)^k\boldsymbol{x}_2 \in W(\alpha_2)$, $\mathbf{0} \neq (A-\alpha_1 E)^k\boldsymbol{x}_s \in W(\alpha_s)$ である．ここで帰納法の仮定を使うと，$c_2 = \cdots = c_s = 0$.　ゆえに $c_1 = 0$．//

定理 III　定理 II の条件の下で，

$$\{W(\alpha_1) + W(\alpha_2) + \cdots + W(\alpha_{s-1})\} \cap W(\alpha_s) = \{\mathbf{0}\}$$

および，

$$\dim\{W(\alpha_1) + \cdots + W(\alpha_s)\} = \dim W(\alpha_1) + \cdots + \dim W(\alpha_s)$$

証明　$\{W(\alpha_1) + W(\alpha_2) + \cdots + W(\alpha_{s-1})\} \cap W(\alpha_s) \neq \{\mathbf{0}\}$ と仮定．このとき，$\boldsymbol{x}_i \in W\alpha_i$　$(1 \leq i \leq s-1)$ の 1 次結合として，$\boldsymbol{x}_s \in W(\alpha)_s$ を表せるから，

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1} = \boldsymbol{x}_s$$

右辺を移項してみると，これは 1 次従属の関係式である ($\boldsymbol{x}_s$ の係数が 0 でない) から，定理 II の条件 (1 次独立性) に反する．その次の式は次元定理による．//

定理 IV　A が n 次正方行列で，その固有値がすべて V の元とする．このとき，

$$(\text{固有方程式 } \mathit{\Phi}_A(t) \text{ の固有値}\alpha\text{の重複度 } r) \leq \dim W(\alpha)$$

証明　A は固有値がすべて V の元だから，三角化可能である：

$$X^{-1}AX = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & * & * & & & \\ & \ddots & * & & B & \\ & & \alpha & & & \\ \hline & & & \beta_1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_p \end{array}\right) \qquad X = (_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \cdots)$$

(ただし，β_i　$(1 \leq i \leq p)$) は α と異なる固有値)
$W = S[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]$ とおくと，

$$\begin{cases} (A-\alpha E)\boldsymbol{x}_r & \in S[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}] \\ (A-\alpha E)\boldsymbol{x}_{r-1} & \in S[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-2}] \\ \qquad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ (A-\alpha E)\boldsymbol{x}_1 & = \qquad\quad \mathbf{0} \end{cases}$$

すなわち，$(A-\alpha E)^r\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ で，$W\subset W(\alpha)$．これより，$r=\dim W\leq\dim W(\alpha)$．//

定理 V　A が n 次正方行列で，その固有値がすべて V の元とする．このとき，

$$(\text{固有方程式 } \Phi_A(t) \text{ の固有値} \alpha_i \text{の重複度 } r_i)=\dim W(\alpha_i)$$

証明　定理 IV で，$r_i\leq\dim W(\alpha_i)$ は示した．ここでは等号成立を示せばよい．$W(\alpha_1)+W(\alpha_2)+\cdots+W(\alpha_s)\subset V$ より，$\dim\{W(\alpha_1)+W(\alpha_2)+\cdots+W(\alpha_s)\}\leq\dim V$．定理 III より，

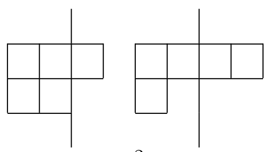
$$\dim W(\alpha_1)+\dim W(\alpha_2)+\cdots+\dim W(\alpha_s)\leq\dim V$$

定理 IV より，

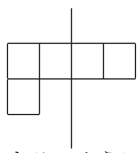
$$n=r_1+r_2+\cdots+r_s\leq\dim W(\alpha_1)+\dim W(\alpha_2)+\cdots+\dim W(\alpha_s)\leq\dim V=n$$

今，$1\leq\exists i\leq s$, $r_i<\dim W(\alpha_i)$ と仮定すると，明らかに矛盾．ゆえに等号成立．//

この定理が，大きさ r_i のジョルダンブロックの存在を示唆していると思います．本当はここから先でジョルダン標準型の存在を示すための証明が必要となりますが，一般的に扱うのはかなりきついので省略します．
ジョルダン標準型の構成法を問う理論的な問題では，方法 2(「連立 1 次方程式的」方法) があまり役に立ちません．最初のほうに述べた方法を，実際に構成法の問題に適用してみましょう．確認テストからの出題です．
例題　$\Phi_A(t)=(t-a)^5, \mathrm{rank}(A-aE)=3, \mathrm{rank}(A-aE)^2=2$ のとき，A のジョルダン標準型の形を決定し，$X^{-1}AX$ がジョルダン標準型になるような正則行列 X の構成法を述べよ．ただし，$W_k(a)=\{\boldsymbol{x}\in K^5\mid(A-aE)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を必ず用いて述べよ．
解答　$\mathrm{rank}(A-aE)=3$ から，ジョルダンブロックの個数は $5-3=2$．次のダイアグラムが考えられる：



$\mathrm{rank}(A-aE)^2=2$ より，適するのは，



である．ゆえにジョルダン標準型は，$J(a;4)\oplus J(a;1)$ である．次に，正則行列 X を構成する．最初に，$W_4(a)$ に含まれて $W_3(a)$ に含まれない K^5 の部分空間 ($W_4(a)/W_3(a)$ と表すことにする) 元 $\boldsymbol{x}_4$ をとる．すなわち，$(A-aE)\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{0}$, $(A-aE)\boldsymbol{x}_4\neq\boldsymbol{0}$ を満たすようにとる．そして，$\boldsymbol{x}_3=(A-aE)\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_2=(A-aE)\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_1=(A-aE)\boldsymbol{x}_2$ とする．最後に，$\boldsymbol{x}_5$ は $W_1(a)$ の元であるから，$\boldsymbol{x}_1$ と 1 次独立なようにとればよい．//

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$	$\boldsymbol{x}_4$
$\boldsymbol{x}_5$			

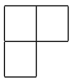
イメージ図は下の通りです．基底の取り方がこれで分かると思います．

$W_1(a)$	$W_2(a)/W_1(a)$	$W_3(a)/W_2(a)$	$W_4(a)/W_3(a)$
$W_1(a)$			

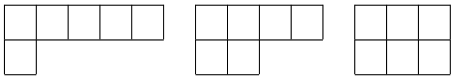
これは方法 1 による構成法です．方法 2 による構成法は，少し書きにくいのでここでは省略します．具体的な問題を解いていれば経験的に分かるようになるかもしれません．

例題 $\Phi_A(t) = (t-a)^6(t-b)^3$ $(a \neq b)$, $\mathrm{rank}(A-aE) = \mathrm{rank}(A-bE) = 7$, $\mathrm{rank}(A-aE)^3 = 3$ のとき，ジョルダン標準型の形を決定し，変換行列の構成法を述べよ．$W_k(a) = \{\boldsymbol{x} \in K^9 \mid (A-aE)^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ を用いて述べること．

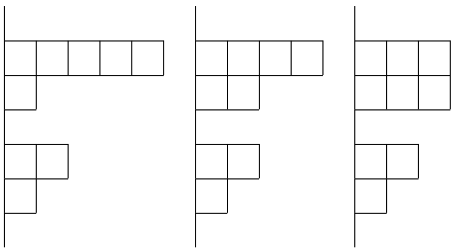
解答 $\mathrm{rank}(A-aE) = \mathrm{rank}(A-bE) = 7$ より，それぞれの固有値に対するジョルダンブロックの個数は 2．b についてはダイアグラムがすぐに決まる：



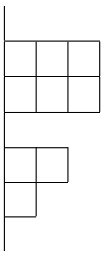
次に，a について考える．ジョルダンブロックの数は 2 と分かった．ダイアグラムは次の通り：



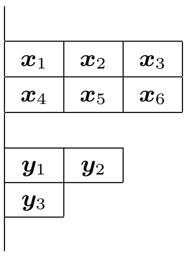
さて，$\mathrm{rank}(A-aE)^3 = 3$ であるから，下のように a と b に分けて考える (上の 6 つのブロックが a を，下の 3 つのブロックが b を示す) と，適するのがどれか分かる：



すなわち，条件を満たすのは,



となり，$J(a;3) \oplus J(a;3) \oplus J(b;2) \oplus J(b;1)$ が求めるジョルダン標準型である．
次に，その変換行列の構成法を考えるが，a と b は別々に考えてもよい．



まず, a について考える．$\boldsymbol{x}_3$ は, $W_3(a)$ の基底で $W_2(a)$ の基底でないものをとる．$\boldsymbol{x}_2 = (A-aE)\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_1 = (A-aE)\boldsymbol{x}_2$

とする．$\boldsymbol{x}_6$ は, $W_3(a)$ の基底であって $W_2(a)$ の基底でなく, 更に $\boldsymbol{x}_3$ と 1 次独立なものをとる．$\boldsymbol{x}_5 = (A-aE)\boldsymbol{x}_6$, $\boldsymbol{x}_4 = (A-aE)\boldsymbol{x}_5$ とする．これで a については構成できた．次に b について考える．$\boldsymbol{y}_2$ は $W_2(b)$ の基底で $W_1(b)$ の基底でないものをとる．$\boldsymbol{y}_1 = (A-aE)\boldsymbol{y}_2$ とする．$\boldsymbol{y}_3$ は，$W_1(b)$ の基底で，$\boldsymbol{y}_1$ と 1 次独立なものをとればよい．以上で，ジョルダン標準型の変換行列が構成できた．//

老婆心　$X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$ とすると,
$AX = (a\boldsymbol{x}_1, a\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1, a\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_2, a\boldsymbol{x}_4, a\boldsymbol{x}_5 + \boldsymbol{x}_4, a\boldsymbol{x}_6 + \boldsymbol{x}_5, b\boldsymbol{y}_1, b\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{y}_2)$

$$= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|c} a & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & a & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & & \\ \hline & & & a & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & a & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & a & & & \\ \hline & & & & & & b & 1 & \\ & & & & & & 0 & b & \\ \hline & & & & & & & & b \end{array}\right)$$

例題　次の定理を示せ：

$$\boldsymbol{x} \in W_k(a) \text{ に対し，} \boldsymbol{x},\ (A-aE)\boldsymbol{x},\ \cdots\ (A-aE)^{k-1}\boldsymbol{x} \text{ は 1 次独立.}$$

証明　$c_0\boldsymbol{x} + c_1(A-aE)\boldsymbol{x} + \cdots + c_{k-1}(A-aE)^{k-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とおこう．$(A-aE)^{k-1}$ を左から掛けると，第 2 項以降はすべて消える．$c_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より $c_0 = 0$. $(A-aE)^{k-2}$ を左から掛けて，同様に $c_1 = 0$. これを繰り返せば, $c_i = 0\ (0 \leq \forall i \leq k-1)$. すなわち，1 次独立．//

とりあえず，これでジョルダン標準型は終わりにします.「正規行列の対角化」のところは要点だけにします (させてください).

4　正規行列の対角化

4.1　要点

- **正規行列**とは，$A^*A = AA^*$ を満たす正方行列 A のことである．ここに，A^* は**随伴行列**と呼ばれ，A の転置・複素共役の行列である.
- **正規行列の例**
  ユニタリ行列　$U^*U = UU^* = E$. $\mathbb{R}$ 係数なら直交行列.
  エルミート行列　$A^* = A$. $\mathbb{R}$ 係数なら対称行列.
- 次の定理が成り立つ：

$$A \text{ が正規行列} \iff A \text{ は適当なユニタリ行列によって対角化される}$$

- 次の定理が成り立つ：

エルミート行列の固有値はすべて実数.

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

を，**実 2 次形式**といい，$a_{ij} = a_{ji}$ として，実対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$$

と表せる．この 2 次形式は，適当な直交変換，すなわち直交行列 P により $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ とすることで，次の**実 2 次形式の標準型**に変換できる：

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \lambda_i \text{は} A \text{の固有値}$$

P は，A を対角化する変換行列である．

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{x}_i x_j \ (a_{ij} = \overline{a}_{ji})$$

を，**エルミート形式**という．$A = (a_{ij})$ はエルミート行列で，

$$\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})$$

となる．これから，エルミート形式は実数値であると分かる (エルミート内積の定義から，$\overline{(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})} = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ が導ける)．エルミート形式は，適当なユニタリ変換によって次の形に変形される (U は A を対角化するユニタリ行列)：

$$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 |y_1|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2 \quad \lambda_i \text{は} A \text{の固有値}$$

4.2 正規行列を対角化するユニタリ行列の作り方

n 次正規行列を A とする．

- A の固有多項式を求め，重複を許して n 個の固有値を求める．
- それぞれの固有値に対して固有ベクトルを求める (n 本出てくる)．
- 得られた固有ベクトルを**グラム・シュミットの正規直交化法**によって**正規直交基底** $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ (大きさが 1，異なるベクトルは互いに直交する．クロネッカーのデルタを用いれば，$(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$) に変換する．
- $U = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ とすれば，U はユニタリ行列で，$U^{-1}AU$ は対角化される．
- この方法を用いて，先ほどのエルミート形式を標準型に変換できる：

$$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{y}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^* U^* AU\boldsymbol{y} = (\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 |y_1|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2$$