2007年度冬学期　数学 II 試験問題

(担当　戸瀬)

I(1)$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$V = \mathbb{R}\vec{a_1} + \mathbb{R}\vec{a_2} + \mathbb{R}\vec{a_3}$ の正規直交基底を 1 組求めよ。

(2)$\vec{x} \in \mathbb{R}$ の V への正射影を 4 次正方行列 P を用いて $P\vec{x}$ と表せ。

II　$\mathbb{R}^n$ の部分空間 V の次元を ℓ として V の基底を $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_\ell}$ とする。

(1) 一般に $m \times n$ 行列 A に対して

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^t A)$$

であることを用いてよい。

$$V^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ (\vec{v}, \vec{x}) = 0\ (\forall \vec{v} \in V)\}$$

に対して

$$(a) V^\perp = \ker({}^t A) \qquad (b) \dim V^\perp = n - \ell$$

であることを示せ。

(2)$(a) V \subset (V^\perp)^\perp$ を示せ。

　$(b) V = (V^\perp)^\perp$ を次元定理を用いて示せ。

(3)$m \times n$ 行列 B に対して

$$\ker(B)^\perp = \mathrm{Im}({}^t B)$$

を示せ。

III　$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列を用いて対角化せよ。

IV $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ により $\mathbb{R}^3$ は

$$\mathbb{R}^3 = V(-1) \oplus V(3) \oplus V(-3)$$

と直和分解できる。($V(\alpha)=\ker(A-\alpha I_3)$ とする。)

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3}$$

とこの直和分解に応じて分解するとき

$$\vec{x_1} = f(A)\vec{x} \ (\in V(-1))$$

となる多項式 f を求めよ。

V $A=(a_{ij})$ を 3 次正方行列とする。

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

とするとき a_2 を求めよ。

VI 次の行列の最小多項式を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ (2) B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

VII VI の (2) の行列 B に対して $\mathbb{R}^n$ を一般固有空間に直和分解せよ。各固有空間はどの行列の核であるかについて記述すればよい。

（VII ができない場合，次の VIII を解いてよい。）
VIII A を 3 次正方行列とする。A が正則のとき A^{-1} を A の多項式で表せ。