2007年度冬学期　数学　試験問題

戸瀬

I

(1) グラム・シュミットの正規直交化法により求める

$\vec{p_1} = \dfrac{\vec{a_1}}{||\vec{a_1}||}$ とおく

$(\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1} - \vec{a_2}$ は $\vec{p_1}$ に垂直である

このベクトルと同じ方向の単位ベクトルを $\vec{p_2}$ とおく

また、$(\vec{p_1}, \vec{a_3})\vec{p_1} + (\vec{p_2}, \vec{a_3})\vec{p_2} - \vec{a_3}$ は $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ に垂直である

このベクトルと同じ方向の単位ベクトルを $\vec{p_3}$ とおく

$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = (\vec{p_2}, \vec{p_3}) = (\vec{p_3}, \vec{p_1}) = 0$ かつ $||\vec{p_1}|| = ||\vec{p_2}|| = ||\vec{p_3}|| = 1$ であるよって求める正規直交基底のひとつは

$\vec{p_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{p_2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \vec{p_3} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\3\end{pmatrix}$

(2)

$\vec{x}$ の V への正射影は $(\vec{p_1}, \vec{x})\vec{p_1} + (\vec{p_2}, \vec{x})\vec{p_2} + (\vec{p_3}, \vec{x})\vec{p_3}$

これを変形する

$$\begin{aligned}
(\vec{p_1}, \vec{x})\vec{p_1} + (\vec{p_2}, \vec{x})\vec{p_2} + (\vec{p_3}, \vec{x})\vec{p_3} &= \vec{p_1}(\vec{p_1}, \vec{x}) + \vec{p_2}(\vec{p_2}, \vec{x}) + \vec{p_3}(\vec{p_3}, \vec{x}) \\
&= \vec{p_1}{}^t\vec{p_1}\vec{x} + \vec{p_2}{}^t\vec{p_2}\vec{x} + \vec{p_3}{}^t\vec{p_3}\vec{x} \\
&= (\vec{p_1}{}^t\vec{p_1} + \vec{p_2}{}^t\vec{p_2} + \vec{p_3}{}^t\vec{p_3})\vec{x} \\
&= P\vec{x}
\end{aligned}$$

計算は省略

II

(1)

$A = (\vec{a_1}\ \ldots\ \vec{a_l})$ とする

(a)

$\forall \vec{v} \in V\ \vec{v} = A\vec{\vec{t}}\,(\vec{t} \in \mathbb{R}^l)$

$\forall \vec{x} \in V^{\perp}$

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{x}) &= (A\vec{t}, \vec{x}) \\ &= (\vec{t}, {}^tA\vec{x}) = 0 \end{aligned}$$

$\vec{t}$ は任意のベクトルであるから、${}^tA\vec{x} = \vec{0}$ すなわち $\vec{x} \in ker({}^tA)$

よって、$V^{\perp} = ker({}^tA)$

(b)

(a) より、$dimV^{\perp} = dim(ker({}^tA))$

次元定理より、$dim(ker({}^tA)) = n - dim(Im({}^tA))$

$dim(Im({}^tA)) = rank({}^tA)$ より、

$dim(ker({}^tA)) = n - rank({}^tA) = n - rank(A) = n - l$

よって示せた。

(もう少し簡単な示し方がありそう)

♣dim は部分空間、rank は行列の次元...?

(2)

(a)

$\forall \vec{x} \in V^{\perp}$ は $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_l}$ と垂直

$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V^{\perp}(\vec{x}, \mathbb{R}\vec{a_1} + \ldots + \mathbb{R}\vec{a_l}) = 0$

ここで、$\mathbb{R}\vec{a_1} + \ldots + \mathbb{R}\vec{a_l}$ は V に含まれる任意のベクトルである。

すなわち、$V^{\perp}$ に垂直な任意のベクトルは、V に含まれる任意のベクトルである。

$\therefore V \subset (V^{\perp})^{\perp}$

(b)

$dim(V) = dim((V^{\perp})^{\perp})$ を示せば、(a) とあわせて、等号が示せる

$dimV = l$

(1)(b) から $dimV^{\perp} = n - l = n - dimV$

$dim((V^{\perp})^{\perp}) = n - dim(v^{\perp}) = n - (n - l) = l$ よって $dim(V) = dim((V^{\perp})^{\perp})$

$\therefore V = (V^{\perp})^{\perp}$

(自信なし)

(3)

$B = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b_1} \\ \vdots \\ {}^t\vec{b_n} \end{pmatrix}$ とおくと

$\forall \vec{x} \in B$ に対して、$B\vec{x} = \vec{0}$ が成立する

$\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$ により生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W を定めると

$ker(B) = W^\perp \because$ (1)(a)

よって $ker(B)^\perp = (W^\perp)^\perp = W$

$W = Im({}^tB)$ である

$\therefore ker(B)^\perp = Im({}^tB)$ III

$$\begin{aligned} |\lambda I_3 - A| &= (\lambda-4)^3 - 3(\lambda-4) - 2 \\ &= (\lambda-3)^2(\lambda-6) \end{aligned}$$

$|\lambda I_3 - A| = 0$ とすると $\lambda = 3, 6$

$\lambda = 3$ のとき

$(3I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると x+y+z=0 より、

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 6$ のとき

$(3I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると x=y=z より、

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直

V(3) から垂直なベクトルを 2 つ選んで直交行列とする。

ここでは足したものと引いたもの、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を選んだ。

(正規化は必要？)

$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

IV
$f(A)\vec{x_2} = f(A)\vec{x_3} = \vec{0}$ でなければならない。
$A\vec{x_2} - 3\vec{x_2} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - 3I_3)\vec{x_2}$
$A\vec{x_3} - (-3)\vec{x_3} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - (-3)I_3)\vec{x_3}$
また、$(A - 3I_3)(A + 3I_3) = (A + I_3)(A - I_3)$ であるからこれを $g(A)$ とおくと、
$g(A)\vec{x_2} = g(A)\vec{x_3} = \vec{0}$ である。また、$g(A)\vec{x_1} = -8\vec{x_1}$ より、$f(A) = -\frac{1}{8}g(A)$ とおくと $f(A)\vec{x_1} = x_1$ となるから
$f(A)\vec{x} = f(A)(\vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3}) = \vec{x_1}$ であり、元の条件を満たす。
$\therefore f(A) = -\frac{1}{8}(A^2 - 9I)$
V
計算すれば出ます。
訂正：a_1 がトレースでした。a_2 は計算
$a_2 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -tr(A)$ トレース
たしかこれで合っていたはず
ちなみに a_3 が det(A)
VI
行列式を解いて、1 個ずつかけて、次数が 1 番小さいときにゼロ行列になったものが、最小多項式です。
(1)
$|\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ $\lambda + 2, \lambda - 1$ は共に 1 次以上だから、$(A + 2I)(A - I)$ から計算する
$(A + 2I)(A - I) \neq O$
ケーリー・ハミルトンの定理から、$(A + 2I)(A - I)^2 = O$
よって最小多項式は $(\lambda + 2I)(\lambda - I)^2$
(2)
$|\lambda I - B| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$
$(B - I)(B - 2I) \neq O$
ケーリー・ハミルトンの定理から、$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ が最小多項式

VII

固有値 $\lambda=1$ の一般固有空間 V_1 は $V_1=\{\vec{v}|(A-I)\vec{v}=O \Leftrightarrow x=y=z\}$
固有値 $\lambda=2$ の一般固有空間 V_2 は $V_2=\{\vec{v}|(A-2I)^2\vec{v}=O \Leftrightarrow 2x-y-2z=0\}$
よって

$V_1=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$V_2=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$

♣一般固有空間のすべての直和は n 次元全体を張る。

VIII

VI から、$A^3+A^2-3A+2I=O_3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(A^2+A-3I)A=I$

よって、$A^{-1}=-\dfrac{1}{2}(A^2+A-3I)$

エルミートの問題は出ていないようですが、一応勉強しておいたほうがいいかもしれません