【問題 06 - I】

A を実数値の $m \times n$ 行列とするとき，$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$A\vec{v} = \vec{0} \iff {}^tAA\vec{v} = \vec{0}$$

を示せ.

【解答】

まず，左から右は明らかで，

$$A\vec{v} = \vec{0} \implies {}^tAA\vec{v} = {}^tA\vec{0} = \vec{0}$$

となる．また，右から左については，

$$\begin{aligned} {}^tAA\vec{v} = \vec{0} &\implies ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = 0 \\ &\implies (A\vec{v}, A\vec{v}) = 0 \\ &\implies \|A\vec{v}\|^2 = 0 \\ &\implies A\vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

以上より，

$$A\vec{v} = \vec{0} \iff {}^tAA\vec{v} = \vec{0}$$

が示された.

【問題 06 - II】

実対称行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を，直交行列で対角化せよ．

さらに，$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ で，$\|\vec{x}\| = 1$ を満たす $\vec{x}$ に対して，2 次形式 $(B\vec{x}, \vec{x})$ の最大値と最小値を求めよ．

【解答】

まず B を対角化する．B の固有方程式は,

$$\begin{aligned}
\Phi_B(\lambda) = |\lambda I - B| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \qquad (1r+=4r, 2r+=3r) \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda-1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (2\text{ 列の余因子展開}) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3r+=1r) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1) \begin{vmatrix} 2 & -\lambda-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1\text{ 列の余因子展開}) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+3) = 0
\end{aligned}$$

よって，B の固有値は，$\lambda = 1, -1, -3$ である．

(a)$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルについて

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff (B - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，固有空間 $V(1)$ の基底として,

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が求まる．これにシュミットの直交化法を用いると，次のようになる．

$$\vec{p_1} = \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \frac{\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}}{\|\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルについて

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff (B+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルについて

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff (B+3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \\ -z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上の $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \vec{p_4}$ を用いて，$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}\ \vec{p_4})$ とおくと，P は直交行列である．このとき,

$$BP = (B\vec{p_1}\ B\vec{p_2}\ B\vec{p_3}\ B\vec{p_4}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ -\vec{p_3}\ -3\vec{p_4}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}\ \vec{p_4})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} \qquad (\text{ここで}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A\ \text{とおく．})$$

と B は対角化される．
また，$\vec{u} = {}^t P\vec{x} = {}^t(u_1, u_2, u_3, u_4)$ とおくと，直交行列の性質より

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = (P\vec{u}, P\vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$$

なので，$\vec{x}$ が $\|\vec{x}\| = 1$ を満たして動くとき，$\vec{u}$ も $\|\vec{u}\| = 1$ を満たしながら動く．この $\vec{u}$ を用いると,

$$(B\vec{x}, \vec{x}) = (PAP^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (PA{}^tP\vec{x}, \vec{x}) = (A{}^tP\vec{x}, {}^tP\vec{x}) = (A\vec{u}, \vec{u}) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - 3u_4^2$$

と与えられた 2 次形式は書ける．これが，$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$ を満たしながら動くとき,

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - 3u_4^2 = 1 - 2u_3^2 - 4u_4^2 \leq 1$$

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - 3u_4^2 = 4u_1^2 + 4u_2^2 + 2u_3^2 - 3 \geq -3$$

よって，$(B\vec{x}, \vec{x})$ の最大値は 1 ($u_3 = u_4 = 0, u_1^2 + u_2^2 = 1$)，最小値は -3 ($u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_4 = \pm 1$).

【問題 06 - III】
$\mathbb{R}^4$ 中の $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; x+y-z-w=0, x-y-z-w=0 \right\}$ を考える.
(1)V の正規直交基底を求めよ.
(2)$V^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ.

【解答】
(1) まずはじめに,

$$x+y-z-w=0 \wedge x-y-z-w=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \wedge x-z-w=0$$

となるので，V に含まれるベクトルは次のように表される.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ 0 \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これより,

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は V の基底であるので，これらをシュミットの直交化法で直交化し，正規化すればよい．すると,

$$\vec{p_1} = \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{p_2} = \frac{\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}}{\|\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる．この $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ は V の正規直交基底となっている.
(2)

$$V^{\perp} = \left\{ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}; \big(\vec{\alpha}, (z\vec{a_1} + w\vec{a_2})\big) = 0 \ (\forall z, w) \right\} = \left\{ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix}; (\vec{\alpha}, \vec{a_1}) = 0, (\vec{\alpha}, \vec{a_2}) = 0 \right\}$$

$(\vec{\alpha}, \vec{a_1}) = 0, (\vec{\alpha}, \vec{a_2}) = 0$ を s, t, u, v について解けば，$V^{\perp}$ に含まれるベクトルは次のように表される.

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \\ -s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これより,

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は $V^{\perp}$ の基底である．すでにこれらは直交しているので，あとは単に正規化すればよい．すると,

$$\vec{q_1} = \frac{\vec{b_1}}{\|\vec{b_1}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{q_2} = \frac{\vec{b_2}}{\|\vec{b_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．この $\vec{q_1}, \vec{q_2}$ は $V^{\perp}$ の正規直交基底となっている.

【問題 06 - IV】

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，固有多項式 $\Phi_C(\lambda)$ を計算して，

$$\Phi_C(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

であることを示せ．そして，

$$V(1) \oplus V(2) = \mathbb{R}^3$$

を示せ．

最後に，$\mathbb{R}^3$ から $V(1)$ への射影 P を C で表せ．

【解答】

C の固有多項式は，次のようになる．

$$\begin{aligned}
\Phi_C(\lambda) = |\lambda I - C| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 + \lambda(\lambda - 2) & -1 - (\lambda - 2) \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-1) \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda + 1 & -\lambda + 1 \\ -\lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)
\end{aligned}$$

[$\lambda = 1$ について]

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (C - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，$V(1)$ の基底が 2 つ求まる．

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V(1) = \{\vec{x_1} \in \mathbb{R}^3;\ \vec{x_1} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}\}$$

[$\lambda = 2$ について]

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (C - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，$V(2)$ の基底が 1 つ求まる．

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V(2) = \{\vec{x_2} \in \mathbb{R}^3;\ \vec{x_2} = c\vec{v_3}\}$$

$V(1)+V(2)$ が直和であることについて

$$\begin{aligned}\vec{x_1}\in V(1),\ \vec{x_2}\in V(2),\ \vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{0} &\implies (C-I)\vec{x_1}+(C-I)\vec{x_2}=\vec{0}\\ &\implies 2\vec{x_2}-\vec{x_2}=\vec{0}\\ &\implies \vec{x_2}=\vec{0},\ \vec{x_1}=-\vec{x_2}=\vec{0}\end{aligned}$$

よって,

$$\vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{0} \implies \vec{x_1}=\vec{x_2}=\vec{0}$$

が示されたので，$V(1)+V(2)$ は直和である．

$V(1)\oplus V(2)=\mathbb{R}^3$ であることについて

まず，上の直和であることの証明から，$\vec{0}$ でない $\vec{x_1}\in V(1)$ と $\vec{x_2}\in V(2)$ は，線形独立であることが分かる．
すなわち，$\vec{v_1},\,\vec{v_2},\,\vec{v_3}$ は線形独立で，$(\vec{v_1},\,\vec{v_2},\,\vec{v_3})^{-1}$ が存在する．このとき，任意の $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=(\vec{v_1},\,\vec{v_2},\,\vec{v_3})^{-1}\vec{r}$$

で定まる $a,\,b,\,c$ をとると,

$$a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}=(\vec{v_1},\,\vec{v_2},\,\vec{v_3})\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\vec{r}$$

となる．つまり，任意の $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ は，$V(1)\oplus V(2)$ に含まれる．すなわち,

$$\mathbb{R}^3\ \subset\ V(1)\oplus V(2)$$

また，明らかに

$$V(1)\oplus V(2)\ \subset\ \mathbb{R}^3$$

であるので，これらから,

$$V(1)\oplus V(2)=\mathbb{R}^3$$

$V(1)$ への射影について

$\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$\vec{r}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$ となるような $\vec{x_1}\in V(1),\ \vec{x_2}\in V(2)$ をとる．
$\vec{r}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$ に $(C-2I)$ を左からかけると,

$$\begin{aligned}(C-2I)\vec{r} &= (C-2I)\vec{x_1}+(C-2I)\vec{x_2}\\ &= (C-2I)\vec{x_1}\\ &= \vec{x_1}-2\vec{x_1}\\ &= -\vec{x_1}\end{aligned}$$

求める射影 P は,

$$\vec{x_1}=P\vec{r}$$

となればよいので,

$$P=-C+2I_3$$

【問題 06 - V】

次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

【解答】

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(2) (1 列について余因子展開)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

【問題 06 - VI】

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して,

$$D^6 - 4D^5 + 2D^4 + 4D^3 + D^2$$

を求めよ.

【解答】

まず, 固有多項式 $\Phi_D(\lambda)$ を求める.

$$\begin{aligned} \Phi_D(\lambda) = |\lambda I_3 - D| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad \text{(2 列について余因子展開)} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \end{aligned}$$

多項式 $\lambda^6 - 4\lambda^5 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + \lambda^2$ を $\Phi_D(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$ で割ると,

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + \lambda^2 = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)\Phi_D(\lambda) + 4$$

なので, Hamilton-Cayley の定理から,

$$\begin{aligned} D^6 - 4D^5 + 2D^4 + 4D^3 + D^2 &= (D^3 - 2D^2 - D + 2I_3)\Phi_D(D) + 4I_3 \\ &= 4I_3 \end{aligned}$$

と計算できる.

【問題 06 - VII】

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として，$\mathbb{R}^4$ 中の $\mathrm{Im}(F)$ を考える．$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\mathrm{Im}(F)$ への正射影を，$F\vec{w}$ $(\vec{w} \in \mathbb{R}^4)$ という形を用いて表せ．ただし最小自乗法を使うこと．

【解答】

求める正射影 $\vec{\alpha}$ は $\mathrm{Im}(F)$ 上なので，

$$\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \vec{\alpha} = F\vec{w}$$

また，$\vec{v} - \vec{\alpha}$ は，$\mathrm{Im}(F)$ 上の任意のベクトルと直交する．すなわち，

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ ; \ (\vec{v} - \vec{\alpha}, F\vec{x}) = 0 \qquad \cdots (\star)$$

($\mathrm{Im}(F)$ 上の任意のベクトルを，$\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ を任意のベクトルとして $F\vec{x}$ と書いている．)

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ ; \ ({}^tF(\vec{v} - \vec{\alpha}), \vec{x}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^tF(\vec{v} - \vec{\alpha}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^tF\vec{v} = {}^tF\vec{\alpha} \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^tF\vec{v} = {}^tFF\vec{w} \end{aligned}$$

よって，

$$\vec{w} = ({}^tFF)^{-1} \ {}^tF\vec{v}$$

$$\vec{\alpha} = F\vec{w} = F({}^tFF)^{-1} \ {}^tF\vec{v}$$