

2005年度「数学II」2学期末試験

(担当 戸瀬)

I 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -15 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

に対して $\ker(A)$ と $\text{Im}(A)$ をそれぞれ1組求めましょう。

II(1) 実対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

に対して直交行列 P を求めて tPBP が対角行列となるようにしましょう。

(2)(1)の結果を用いて、2次形式

$$(B\vec{v}, \vec{v}) \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3)$$

に対して、 $\|\vec{v}\| = 1$ の下での最小値および最大値を求めましょう。また、最小値、最大値をとるベクトルについても調べましょう。

III 4次元空間 \mathbb{R}^4 中

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考えます。部分空間 V_1 は \vec{a}_1 と \vec{a}_2 によって生成され、部分空間 V_2 は \vec{a}_3 と \vec{a}_4 によって生成されるとします。部分空間 $V_1 + V_2$ の基底と $V_1 \cap V_2$ の基底を求めましょう。

IV 行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と4次元実ベクトル

$$\vec{e} = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

に対して、 $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ の関数

$$f(\vec{v}) = \|C\vec{v} - \vec{e}\|$$

を考えます。 $f(\vec{v})$ の最小値を最小自乗法によって求めましょう。

V 行列 $U \in M_n(\mathbb{C})$ が unitary とします。 $\alpha \in \mathbb{C}$ が U の固有値であるとき

$$|\alpha| = 1$$

を示してください。

VI 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -8 & -13 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

と4次元ベクトル

$$\vec{v} = {}^t(3 \ 7 \ a \ b)$$

に対して

$$\vec{v} \in \text{Im}(A)$$

となる条件を a と b に関して求め、そのときの解をすべて求めよ。

VII 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、最小多項式 $m_A(t)$ を求めましょう。さらに、広義固有空間への射影を A を用いて表しましょう。