【問題 04 - I】

$A \in M_5(\mathbb{C})$ の固有多項式と最小多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^5\,,\ \ m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 \qquad \cdots(\sharp)$$

であることが分かっている.

(1) $\vec{v_1}, \vec{v_2} \cdots \vec{v_5} \in \mathbb{C}^5$ が次の条件を満たしているとする.

(i) $(A - \alpha I)\vec{v_1} \neq \vec{0},\ (A - \alpha I)\vec{v_3} \neq \vec{0}$

(ii) $\vec{v_2} = (A - \alpha I)\vec{v_1},\ \vec{v_4} = (A - \alpha I)\vec{v_3},\ (A - \alpha I)\vec{v_5} = \vec{0}$

(iii) $\vec{v_2}, \vec{v_4}, \vec{v_5}$ は線形独立である.

この条件の下で, $P = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}\ \vec{v_4}\ \vec{v_5})$ が正則であることを示し, A の Jordan 標準形を求めよ.

(2) 条件 $(\sharp)$ の下で, (1) と異なる Jordan 標準形を持つ場合があるならば, それを与えよ.

【解答】

(1) $P = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}\ \vec{v_4}\ \vec{v_5})$ の正則を示すには, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}$ が線形独立であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
& c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} + c_4\vec{v_4} + c_5\vec{v_5} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & c_1(A - \alpha I)\vec{v_1} + c_2(A - \alpha I)\vec{v_2} + c_3(A - \alpha I)\vec{v_3} + c_4(A - \alpha I)\vec{v_4} + c_5(A - \alpha I)\vec{v_5} = \vec{0} \\
\Longrightarrow\ & c_1\vec{v_2} + c_3\vec{v_4} = \vec{0} \qquad (\,(A - \alpha I)\vec{v_2} = (A - \alpha I)^2\vec{v_1} = \vec{0},\ \vec{v_4}\ \text{の項も同様}) \\
\Longrightarrow\ & c_1 = c_3 = 0 \qquad (\vec{v_2}, \vec{v_4}\ \text{の線形独立性より})
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} + c_4\vec{v_4} + c_5\vec{v_5} = \vec{0} \ &\Longrightarrow\ c_1 = c_3 = 0\,,\ c_2\vec{v_2} + c_4\vec{v_4} + c_5\vec{v_5} = \vec{0} \\
&\Longrightarrow\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0
\end{aligned}$$

これは, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}$ が線形独立であることを表している. また, このとき

$$\begin{aligned}
A(\vec{v_2}\ \vec{v_1}\ \vec{v_4}\ \vec{v_3}\ \vec{v_5}) &= (A\vec{v_2}\ A\vec{v_1}\ A\vec{v_4}\ A\vec{v_3}\ A\vec{v_5}) \\
&= \big(\alpha\vec{v_2}\ \ (\alpha\vec{v_1} + \vec{v_2})\ \ \alpha\vec{v_4}\ \ (\alpha\vec{v_3} + \vec{v_4})\ \ \alpha\vec{v_5}\big) \\
&= (\vec{v_2}\ \vec{v_1}\ \vec{v_4}\ \vec{v_3}\ \vec{v_5}) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので, 求める Jordan 標準形は次の行列である.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(2) 与えられた $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^5$，$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ という条件の下，

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \cdots (\star)$$

という形の Jordan 標準形が考えられる．実際，$\alpha = 1$ として，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などとすれば，Jordan 標準形は $(\star)$ の形になる．

【問題 04 - II】

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

【解答】

A の固有多項式，最小多項式を計算すると，

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4 ,\ \ m_A(\lambda - 1)^2$$

となる．ここで，

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p_2} = (A - I)\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{p_4} = (A - I)\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} A(\vec{p_2}\ \vec{p_1}\ \vec{p_4}\ \vec{p_3}) &= (A\vec{p_2}\ A\vec{p_1}\ A\vec{p_4}\ A\vec{p_3}) \\ &= \big(\vec{p_2}\ \ (\vec{p_1} + \vec{p_2})\ \ \vec{p_4}\ \ (\vec{p_3} + \vec{p_4})\big) \\ &= (\vec{p_2}\ \vec{p_1}\ \vec{p_4}\ \vec{p_3}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，求める Jordan 標準形は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

【問題 04 - III】

(1) $A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -6 \\ 5 & -2 & -3 \\ 27 & -9 & -10 \end{pmatrix}$ の最小多項式が,

$$m_A(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

であることを示せ.

(2) $W(2) := \ker(A - 2I)^2$, $W(-1) := \ker(A + I)$ とおく．直和分解

$$\mathbb{C}^3 = W(2) \oplus W(-1)$$

において，$\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} \qquad (\vec{x_1} \in W(2)\,,\ \vec{x_2} \in W(-1))$$

とするとき，$\vec{x_1}, \vec{x_2}$ を，A と $\vec{x}$ で表示せよ.

$$\text{Hint}: \frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda+1)} = \frac{\alpha\lambda + \beta}{(\lambda-2)^2} + \frac{\gamma}{\lambda+1}$$

【解答】

(1) まず，A の固有多項式を求める.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 15 & 5 & 6 \\ -5 & \lambda + 2 & 3 \\ -27 & 9 & \lambda + 10 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2\lambda + 1 & 0 \\ -\lambda 5 & \lambda + 2 & 3 \\ -27 & 9 & \lambda + 10 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 5)\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 3 \\ 9 & \lambda + 10 \end{vmatrix} - (-2\lambda + 1)\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -27 & \lambda + 10 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 5)(\lambda^2 + 12\lambda - 7) + (2\lambda - 1)(-5\lambda + 31) \\
&= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\
&= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)
\end{aligned}$$

また，このとき,

$$\begin{aligned}
(A - 2I)(A + I) &= \begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 5 & -4 & -3 \\ 27 & -9 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -5 & -6 \\ 5 & -1 & -3 \\ 27 & -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -6 & -9 \\ -21 & 6 & 9 \\ 63 & -18 & -27 \end{pmatrix} \neq O \\
(A - 2I)^2(A + I) &= \begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 5 & -4 & -3 \\ 27 & -9 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -6 & -9 \\ -21 & 6 & 9 \\ 63 & -18 & -27 \end{pmatrix} = O
\end{aligned}$$

となっているので，A の最小多項式は,

$$m_A(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

である.

(2) まず，Hint の式が λ について恒等式となるような α, β, γ を求める．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\lambda-2)^2(\lambda+1)} &= \frac{1}{3}\Big\{\frac{1}{(\lambda-2)^2}-\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda+1)}\Big\}\\ &= \frac{1}{3}\Big\{\frac{1}{(\lambda-2)^2}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{(\lambda-2)}-\frac{1}{(\lambda+1)}\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{(\lambda-2)^2}\Big(-\frac{1}{9}\lambda+\frac{5}{9}\Big)+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\lambda+1}\end{aligned}$$

となるので，$\alpha=-\dfrac{1}{9}, \beta=\dfrac{5}{9}, \gamma=\dfrac{1}{9}$ である．この時，

$$\Big(-\frac{1}{9}\lambda+\frac{5}{9}\Big)(\lambda+1)+\frac{1}{9}(\lambda-2)^2=1 \qquad \cdots(*)$$

は λ について恒等式である．次に，

$$Q_1=\Big(-\frac{1}{9}A+\frac{5}{9}I\Big)(A+I),\ Q_2=\frac{1}{9}(A-2I)^2$$

とおくと，$(*)$ より，

$$Q_1+Q_2=I \qquad \cdots(\sharp)$$

となり，さらに次のような性質がある．

$$\begin{aligned}Q_1Q_2=Q_2Q_1 &= \frac{1}{9}\Big(-\frac{1}{9}A+\frac{5}{9}I\Big)(A+I)(A-2I)^2\\ &= \frac{1}{9}\Big(-\frac{1}{9}A+\frac{5}{9}I\Big)\Phi_A(A)=O\end{aligned}$$

$(\sharp)$ に Q_1 をかけると: $\quad Q_1^2+Q_1Q_2 = Q_1 \quad\Leftrightarrow\quad Q_1^2=Q_1$

$(\sharp)$ に Q_2 をかけると: $\quad Q_1Q_2+Q_2^2 = Q_2 \quad\Leftrightarrow\quad Q_2^2=Q_2$

また，$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ はその定義より，

$$Q_2\vec{x_1}=\frac{1}{9}(A-2I)^2\vec{x_1}=\vec{0}\ ,Q_1\vec{x_2}=\Big(-\frac{1}{9}A+\frac{5}{9}I\Big)(A+I)\vec{x_2}=\vec{0}$$

を満たす．このとき，

$$\begin{aligned}\vec{x_1} &= (Q_1+Q_2)\vec{x_1}\\ &= Q_1\vec{x_1}\\ &= Q_1(\vec{x}-\vec{x_2})\\ &= Q_1\vec{x}\\ &= \Big(-\frac{1}{9}A+\frac{5}{9}I\Big)(A+I)\vec{x}\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\vec{x_2} &= (Q_1+Q_2)\vec{x_2}\\ &= Q_2\vec{x_2}\\ &= Q_2(\vec{x}-\vec{x_1})\\ &= Q_2\vec{x}\\ &= \frac{1}{9}(A-2I)^2\vec{x}\end{aligned}$$

となる．

【問題 04 - IV】
$A \in M_3(\mathbb{C})$ に対して,

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

が成立するとする．λ の多項式 $f(\lambda)$ に対して

$$\Phi_{f(A)}(\lambda) = (\lambda - f(\alpha))(\lambda - f(\beta))(\lambda - f(\gamma)) \qquad \cdots (\clubsuit)$$

を示せ.

【解答】
まず A は，ある正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と三角化できる．また，三角行列については次の 2 式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \beta_1 & * \\ 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & * & * \\ 0 & \beta_2 & * \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & * & * \\ 0 & \beta_1 + \beta_2 & * \\ 0 & 0 & \gamma_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \beta_1 & * \\ 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & * & * \\ 0 & \beta_2 & * \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & * & * \\ 0 & \beta_1\beta_2 & * \\ 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}$$

すなわち，三角行列同士の和・積において，その対角成分は，単純にもとの対角成分の和・積になることが分かる．このことから，$f(\lambda) = \sum_j a_j \lambda^j$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(P^{-1}AP) &= \sum_j a_j (P^{-1}AP)^j \\ &= \sum_j \begin{pmatrix} a_j\alpha^j & * & * \\ 0 & a_j\beta^j & * \\ 0 & 0 & a_j\gamma^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_j a_j\alpha^j & * & * \\ 0 & \sum_j a_j\beta^j & * \\ 0 & 0 & \sum_j a_j\gamma^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\alpha) & * & * \\ 0 & f(\beta) & * \\ 0 & 0 & f(\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ.

また，

$$
\begin{aligned}
f(P^{-1}AP) &= \sum_j a_j (P^{-1}AP)^j \\
&= \sum_j a_j P^{-1}A^j P \\
&= P^{-1}\Big(\sum_j a_j A^j\Big)P \\
&= P^{-1}f(A)P
\end{aligned}
$$

である．よって，これらを用いると，

$$
\begin{aligned}
\Phi_{f(A)}(\lambda) &= |\lambda I - f(A)| \\
&= |P^{-1}|\,|\lambda I - f(A)|\,|P| \\
&= |\lambda I - P^{-1}f(A)P| \\
&= |\lambda I - f(P^{-1}AP)| \\
&= \Phi_{f(P^{-1}AP)}(\lambda) \\
&= (\lambda - f(\alpha))(\lambda - f(\beta))(\lambda - f(\gamma))
\end{aligned}
$$

となり，(♣) が示された．

【問題 04 - V】

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ を考える．$\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ とする．$\|\vec{x}\| = 1$ の下で，2 次形式 $(A\vec{x}, \vec{x})$ を最大化，最小化せよ．

【解答】

まず A を対角化する．A の固有方程式は,

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 & -\lambda-1 \\ 0 & -2 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & -\lambda-1 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ \lambda+1 & -4 & -\lambda-1 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -4 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2(\lambda+1) & -4 & -\lambda-1 \\ -4 & \lambda-1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda+1)\big(-8+(\lambda-1)(\lambda+1)\big) - 4\big(2(\lambda-1)(\lambda+1)-16\big) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 - 16(\lambda-1)(\lambda+1) + 64 \\
&= \big((\lambda-1)(\lambda+1)-8\big)^2 \\
&= (\lambda-3)^2(\lambda+3)^2 = 0
\end{aligned}
$$

よって，A の固有値は，$\lambda = 3, -3$ である．

(a)$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルについて

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff (A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}
$$

を解くと,

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2w \\ z+w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

よって，固有空間 $V(3)$ の基底として,

$$
\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

が求まる．これにシュミットの直交化法を用いると，次のようになる．

$$
\vec{p_1} = \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \frac{\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}}{\|\vec{a_2} - (\vec{p_1}, \vec{a_2})\vec{p_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

(b)$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルについて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff (A+3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-w \\ -2z+w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，固有空間 $V(-3)$ の基底として，

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求まる．これにシュミットの直交化法を用いると，次のようになる．

$$\vec{p_3} = \frac{\vec{a_3}}{\|\vec{a_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p_4} = \frac{\vec{a_4} - (\vec{p_3},\vec{a_4})\vec{p_3}}{\|\vec{a_4} - (\vec{p_3},\vec{a_4})\vec{p_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上の $\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3},\vec{p_4}$ を用いて，$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}\ \vec{p_4})$ とおくと，P は直交行列である．このとき，

$$AP = (A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}\ A\vec{p_3}\ A\vec{p_4}) = (3\vec{p_1}\ 3\vec{p_2}\ -3\vec{p_3}\ -3\vec{p_4}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}\ \vec{p_4})\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} \qquad (\text{ここで，}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = M\ \text{とおく．})$$

と A は対角化される．

また，$\vec{u} = {}^tP\vec{x} = {}^t(u_1,u_2,u_3,u_4)$ とおくと，直交行列の性質より

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x},\vec{x}) = (P\vec{u},P\vec{u}) = (\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$$

なので，$\vec{x}$ が $\|\vec{x}\| = 1$ を満たして動くとき，$\vec{u}$ も $\|\vec{u}\| = 1$ を満たしながら動く．この $\vec{u}$ を用いると，

$$(A\vec{x},\vec{x}) = (PMP^{-1}\vec{x},\vec{x}) = (PM{}^tP\vec{x},\vec{x}) = (M{}^tP\vec{x},{}^tP\vec{x}) = (M\vec{u},\vec{u}) = 3u_1^2 + 3u_2^2 - 3u_3^2 - 3u_4^2$$

と与えられた 2 次形式は書ける．これが，$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$ を満たしながら動くとき，

$$3u_1^2 + 3u_2^2 - 3u_3^2 - 3u_4^2 = 3 - 6u_3^2 - 6u_4^2 \leq 3$$

$$3u_1^2 + 3u_2^2 - 3u_3^2 - 3u_4^2 = 6u_1^2 + 6u_2^2 - 3 \geq -3$$

よって，$(A\vec{x},\vec{x})$ の最大値は 3 $(u_3 = u_4 = 0, u_1^2 + u_2^2 = 1)$，最小値は -3 $(u_1 = u_2 = 0, u_3^2 + u_4^2 = 1)$．

【問題 04 - VI】

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & -2 & 1 & 13 \\ 9 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$ に対して，$\ker(A)$ と $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求めよ．

【解答】

$\ker(A)$ は,

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^5 \,;\ A\vec{x} = \vec{0}\,\}$$

なので，まず，$A\vec{x} = \vec{0}$ を解く．拡大行列で解くと,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & 1 & 13 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{途中略}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -19 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

したがって,

$$\vec{x} \in \ker(A) \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 + 19x_5 \\ 4x_4 - 130x_5 \\ -2x_4 + 27x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 19 \\ -130 \\ 27 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots(\star)$$

となり，$\ker(A)$ の基底は，次の 2 つ．

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 19 \\ -130 \\ 27 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

次に，$A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{a_3}\ \vec{a_4}\ \vec{a_5})$ とおくと，上の $A\vec{x} = \vec{0}$ についての結果より,

$$\forall x_4, x_5 \,;\quad A(x_4\vec{b_1} + x_5\vec{x_5}) = \vec{0}$$

すなわち,

$$A\vec{b_1} = -\vec{a_1} + 4\vec{a_2} - 2\vec{a_3} + \vec{a_4} = \vec{0}\,,\ A\vec{b_2} = 19\vec{a_1} - 130\vec{a_2} + 27\vec{a_3} + \vec{a_5} = \vec{0}$$
$$\iff \vec{a_4} = \vec{a_1} - 4\vec{a_2} + 2\vec{a_3}\,,\ \vec{a_5} = -19\vec{a_1} + 130\vec{a_2} - 27\vec{a_3}$$

よって，$A\vec{x}$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} + x_4\vec{a_4} + x_5\vec{a_5} \\ &= x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} + x_4(\vec{a_1} - 4\vec{a_2} + 2\vec{a_3}) + x_5(-19\vec{a_1} + 130\vec{a_2} - 27\vec{a_3}) \\ &= (x_1 + x_4 - 19x_5)\vec{a_1} + (x_2 - 4x_4 + 130x_5)\vec{a_2} + (x_3 + 2x_4 - 27x_5)\vec{a_3} \end{aligned}$$

ここで，$(\star)$ より，この最右辺を $\vec{0}$ とすると $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ の各係数は 0 になることが分かる．すなわち，$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ は線形独立である．よって,

$$\mathrm{Im}(A) = \{A\vec{x}\,;\ \vec{x} \in \mathbb{C}^5\} = \{x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} + x_4\vec{a_4} + x_5\vec{a_5} \,;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{C}^5\}$$

の基底は，$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ の 3 つ．

【問題 04 - VII】

$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ が張る部分空間を V，$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が張る部分空間を W とする．部分空間 $V \cap W$ の基底を求めよ．

【解答】

$$\vec{v} \in V \cap W \iff \vec{v} \in V \wedge \vec{v} \in W$$

つまり，$\vec{v}$ は次のように表せる．

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これを p, q, r, s について解くと，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ -2s \\ -4s \\ s \end{pmatrix}$$

となり，

$$\vec{v} \in V \cap W \iff \vec{v} = (-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．よって，次の $\vec{c}$ が，$V \cap W$ の基底である．

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$