

東京大学理科1類 数学前期期末試験(担当:戸瀬信之)

I \mathbb{K} 値の3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

に対して、 $\det(A) = 0$ ならば

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \in \mathbb{K}^3$ が存在することを示せ。

II 実2次対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して、2次形式

$$(B\vec{v}, \vec{v})$$

を考える。 \vec{v} が $\|\vec{v}\| = 1$ を満たしながら動くとき、2次形式の最大値と最小値を求めよ。解法にあたっては、行列の対角化を用いること。

III 実2次正方行列

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が、全ての $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\|C\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$$

を満たすと仮定する。 C を全て求めなさい。

IV 実2次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して、Hamilton-Cayley の定理を用いて D^n を計算せよ。

V 次の2次曲線を標準形に変換せよ。ただし、座標系の平行移動と回転移動を用いてよい。

(1) $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$

(2) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

VI 実3次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

が正則である必要十分条件を求めよ。

VII(1) 3次元ベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える。原点をとおり \vec{a}_1 と \vec{a}_2 が張る平面を V とする。グラム・シュミットの直行化法を用いて

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の V への正射影ベクトル \vec{c} を求めよ。

(2) (1) のベクトル \vec{c} を $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ と \vec{e} で表せ。